BRESCIA - Anno accademico 1998/99
"L'insegnamento e l'apprendimento della matematica: problemi e prospettive"

Raffaella Manara

Parte I

LE AZIONI DEL FARE MATEMATICA: PROGETTARE

1. Architetto, non esecutore

Una delle azioni più significative che fanno parte dell'apprendimento, quando esso è concepito e proposto come esperienza della persona, è *progettare*.
Anche per quanto riguarda la matematica, se ci mettiamo nella prospettiva del suo insegnamento come *reinvenzione guidata*, secondo il suggerimento di Freudenthal, e non come addestramento, è importante tenerla in considerazione come una azione da favorire e promuovere.
Il verbo "progettare" esprime qualcosa che supera di molto il semplice *eseguire*: infatti se all'interno di un progetto vi sono anche fasi esecutive, in cui si svolgono azioni di routine, in generale la struttura di un progetto non coincide con la sua esecuzione.

Progettare è l'azione della persona che vuole 'mettere in opera' una propria idea, vuole renderla 'visibile' al di fuori della propria immaginazione, possibilmente concretizzandola nella realtà, in modo tale da far divenire qualcosa che ha origine nella propria mente patrimonio comune ad altri.
Progettare è la ricerca del *passaggio dall'immaginario al reale*.
Perché ciò avvenga, la persona che progetta deve verificare la consistenza, la realizzabilità, la coerenza del progetto.
Un progetto perciò è di più dell'idea in sé: non è pura fantasia, ma deve giungere ad abbracciare la prefigurazione del percorso che realizzerà l'idea. Si deve avere in mente *che cosa* realizzare, e *come* realizzarlo.
E' progettare realizzare un disegno, un quadro, una fotografia, un'opera d'arte in generale: sono esempi di che cosa significhi pensare e scegliere come '*dare forma'*, dare corpo a ciò che di immagina interiormente. In questo senso è 'progettare' anche la scrittura di un tema o di una poesia, in generale di un testo linguistico, nel quale le parole sono la forma che può dare corpo al pensiero.
Si può anche semplicemente progettare un viaggio, una gita, una ricetta di cucina, una festa con amici, una caccia al tesoro, uno spettacolo. Qualcosa insomma che richiede di *organizzare* le risorse, individuare i mezzi che sono necessari a rendere un'idea 'esperienza' concreta per sé e per gli altri .

Gli adolescenti hanno di solito grande desiderio e grande entusiasmo per i progetti. Essendo molto dotati di fantasia e non sempre in felice rapporto col reale, essi sono interessati all'azione stessa del progettare in senso immaginativo più che alla realizzazione delle loro idee.

Ho trovato molto interessanti e acute le pagine che cito della grande psicanalista F. Dolto: " *..Tocchiamo qui un punto critico: l'adulto non deve indagare troppo nel cuore del bambino, né cercare nei suoi progetti ciò che è razionale e ciò che non lo è. Ho conosciuto un insegnante la cui classe progettava una gita di un giorno alla Torre Eiffel. Tutta la classe preparava il viaggio nei minimi particolari: piantine della metropolitana, orari e prezzi dei treni.*
L'insegnante sapeva che il progetto non si sarebbe realizzato per mancanza di mezzi materiali. Per tre mesi avevano imparato a leggere, scrivere, far di conto consultando gli opuscoli delle ferrovie e le piantine di Parigi, tracciando l'itinerario e stabilendo il programma orario. Era così divertente aver favoleggiato, aver inventato un viaggio. Gli alunni erano nella fase della latenza: otto-undici anni.
L'insegnante non disse fin dall'inizio: Non è possibile, non abbiamo raccolto la somma necessaria. Colui che sapeva che il progetto non sarebbe stato realizzabile, non lo disse. E credo che in questo appunto consista l'educazione." [1]
Le ultime parole del passo riportato non vogliono suggerire che l'educazione sia ingannare il bambino o il giovane, ma piuttosto che gli adulti non devono, seguendo i propri schemi che giudicano più adeguati e realistici, spegnere la grande capacità di immaginazione e fantasia dei giovani. Questa è una risorsa fondamentale per il verificarsi di scoperte nuove, di creazioni nuove: non dimentichiamo quante invenzioni e idee geniali l'umanità debba a persone straordinariamente giovani, che le hanno prodotte proprio perché la loro mente non si era ancora lasciata ingabbiare in schemi precostituiti.
"La matematica - dice per esempio Hardy in *Autobiografia di un matematico*- è una questione per giovani". E in tutti i campi gli esempi sono innumerevoli.
Tuttavia è vero che il giovane ha bisogno di una guida per diventare capace di passare dal sogno al progetto, dall'immagine interiore che possiede all'oggetto reale, effettivo che la esprime. E' vero che, se l'adulto non si limita alla funzione di freno e limite, solo la sua guida conduce a conquistare il metodo che ogni realizzazione effettiva richiede, e che possiamo chiamare, con termine ampio, la *razionalità,* cioè la capacità di giudizio globale, complessivo su un progetto.
Infatti, è importante essere consapevoli che la *fantasia* non è la facoltà di estraniarsi dal reale, come siamo superficialmente portati a pensare. Questo potrebbe essere un atteggiamento gravido di rischi, particolarmente per il giovane.
Al contrario, essa è la possibilità di *vedere più a fondo* dentro il reale, cogliendo in esso più di quello che i sensi semplicemente rivelano.
Fantasia non è dunque fuga dalla realtà, ma piuttosto l'andare oltre essa, cercando e vedendo nel suo configurarsi nessi che non sono immediatamente evidenti: pensiamo alla funzione della fiaba o della metafora. Usare la fantasia non è dunque in contraddizione con usare la razionalità: il regno del fantastico non è necessariamente il regno dell'irrazionale.
Però è la razionalità che deve portare la persona a selezionare nella propria capacità di progettare con l'immaginazione ciò che è poi effettivamente realizzabile. Forse il passaggio dall'adolescenza alla giovinezza e poi alla maturità può essere collocato non tanto, come è opinione comune, nell'abbandonare i sogni, ma piuttosto nel non accontentarsi più dei sogni, cioè nello spingere il proprio desiderio a non fermarsi solo a ciò che si immagina, ma a voler raggiungere uno scopo, una realizzazione. E' questa la spinta che rende capaci di impegnare energie e risorse nel percorso di realizzazione di un progetto, superando i problemi che la realtà presenta.

---
[1] F. Dolto *Adolescenza* Oscar Mondadori, pag. 66-68

Queste considerazioni portano a comprendere che l’azione del progettare è l’orizzonte nel quale si colloca la necessità, lo stimolo psicologico e intellettuale a *risolvere problemi*. La realizzazione di un progetto infatti consiste nel superare gli ostacoli che via via si incontrano, risolvendo cioè un ampio ventaglio di problemi.
E' per questo che, di qualsiasi campo parliamo, l’azione del progettare richiede di cercare il legame tra il particolare e il globale. Un progetto non è solo la somma delle singole parti, ma comprende una ipotesi unitaria all'interno della quale vanno messi in gioco vari aspetti particolari.
Un progetto è sempre qualcosa di plastico, che deve la maggior parte delle volte piegarsi e adattarsi a mutamenti di situazione e di esigenze (pensiamo ai progetti architettonici). Non nasce completo e definito in ogni sua parte, ma si sviluppa e si modifica nel confronto con la realizzazione effettiva.
Questo può spiegare perché dal misurarsi con il problema spesso si ritraggono quelle persone che non solo hanno perso la capacità di progettare in un campo specifico, ma che si sentono prive di un progetto complessivo sulla propria vita, sfiduciate su di sé e sulla propria capacità di realizzazione. Non è raro che si manifesti in questo modo nei giovani, magari attraverso la difficoltà in matematica, un disagio che non riguarda solo la matematica, ma la globalità delle ragioni che muovono una persona verso la vita.

2. Progettare in matematica: il problema

Ma il progettare può riguardare la matematica?
Se guardiamo l’opinione comune e la diffusa prassi relativa alla matematica, nessuna idea sembra più lontana da essa quale quella di inventare, progettare qualcosa. E’ anche vero che troppo spesso il suo apprendimento e il suo insegnamento sono diretti soprattutto ad azioni esecutive e standardizzate, nelle quali è difficile rintracciare il minimo di progettualità.

Invece in matematica è necessario muovere la fantasia e l’azione in varie direzioni e a vari livelli di complessità: essa è una attività mentale che è essenzialmente un 'progettare', anche se non sempre attraverso operazioni fisicamente eseguibili.
Bisogna dire però che l'insegnamento può anche offrire ricche occasioni di 'progetti' che coinvolgono una quantità di aspetti apparentemente non specificamente collegati al contenuto matematico, ma che favoriscono di molto l'acquisizione dei concetti. E particolarmente nella scuola dell'obbligo (attuale) attività di questo genere sono preziose. Propongo due esempi.

1) In una terza media, per introdurre il cubo del binomio, ai ragazzi è stato proposto di costruire un cubo di cartone, contenente al suo interno diversi solidi rappresentanti gli addendi dello sviluppo del cubo.

Così il progetto ha dovuto abbracciare gli aspetti concreti di ricerca e selezione del materiale costruttivo, di realizzazione fisica degli oggetti pensati, insieme a quelli più astratti di comprensione della struttura dell’oggetto da realizzare e dello scopo della sua realizzazione: rendere visibile una proprietà geometrica espressa anche in forma algebrica. L’azione del progettare è stata completata intelligentemente con la richiesta di rendere conto (narrare) del procedimento nella sua totalità e complessità.

2) Nella rivista *Emmeciquadro* n. 1 (pag. 63-70) è descritta un'esperienza di recupero di due soggetti in difficoltà sviluppata attraverso due costruzioni: in un caso un icosaedro, nell'altro un dodecaedro stellato.

L'origine dei due lavori, che rappresentano modelli di veri e propri progetti, è stata un contenuto apparentemente non matematico: il gusto per un oggetto bello.

Va sottolineato particolarmente che questo spunto è insieme profondamente umano e profondamente matematico. Una cosa *bella* è ciò che tutti vogliamo costruire: è per questo che quando la matematica non è bella, non la si vuole imparare!

La costruzione dei due solidi ha mobilitato le energie e le azioni dei due ragazzi in modo tale, da condurli anche all'acquisizione specifica di contenuti matematici che apparivano per loro inaccessibili.

Gli esempi mostrano che proprio nell'azione del progettare la matematica riprende la sua caratteristica di essere qualcosa che riguarda la *razionalità globale* della persona, la modalità del suo rapporto con la realtà, e non soltanto alcuni comportamenti operativi. Questo è vero indipendentemente dalla profondità e difficoltà delle idee o dei contenuti matematici a cui si lavora: possiamo parlare di raffinata analisi matematica come di semplice aritmetica o geometria elementare. Ciò che conta è quello che si mette in gioco della persona: dall'interesse per qualcosa, che può nascere anche da uno spunto limitato o perfino meschino, si arriva alla capacità di dare corpo a una idea .

Ci soffermeremo ora su un aspetto specifico dell'azione di progettare nella matematica e dell'educazione al progettare attraverso la matematica: la soluzione di problemi:

Il *problema* non richiede mai solo una esecuzione: come sua natura richiede di *orientare le proprie scelte*, di sviluppare *strategie*, di *immaginare e prefigurarsi* quello che succederà nel percorso risolutivo. Per questo il problema è una delle azioni didattiche più importanti nell'insegnamento della matematica, ed è in questo senso che costituisce fondamentalmente, pur se a diversi livelli di complessità, un *progetto*.

In questo senso distinguo le due parole esercizio e problema. L'esercizio infatti, anche se non va inteso in senso esclusivamente esecutivo o applicativo, è spesso una attività limitata, relativa a un singolo concetto; può richiedere una singola azione, una singola operazione o formula. Non è sufficiente saper fare queste cose perché sia garantita la comprensione dei concetti che vi stanno sotto. Possiamo facilmente verificare quante volte un allievo sa fare la singola azione (scomporre in fattori primi, calcolare il m.c.m., per esempio), ma non ha la percezione del senso di ciò che sta facendo.

Il *senso* si può conquistare solo in un ambito più globale. Il *problema* è il livello in cui il particolare è collocato o ricollocato nel contesto, nel globale. Dunque l'esercizio deve cominciare da un problema e tornare, sfociare al problema.

Attenzione che questo non vuol dire che, concluso un argomento, si *fanno i problemi su* quell'argomento, come purtroppo fanno molti libri di testo. In questo modo si finisce per proporre solo nuovi schemi di comportamenti che si aggiungono a quelli vecchi, e si produce un nuovo tipo di *azione condizionata*: con questo tipo di problemi, si fa questo.

Lavorare attraverso i problemi significa invece cercare *l'azione consapevole*, cioè allargare l'orizzonte della razionalità, giungere a usare nuovi strumenti concettuali in vecchi o nuovi contesti.

3. In azione di fronte al problema

Per esplicitare quanto si è affermato, analizziamo ora le azioni che intervengono nella risoluzione di un problema. Vogliamo mostrare la pluralità di atteggiamenti e comportamenti che tale soluzione può richiedere, e la globalità di visione che esige, ma anche che produce.

A) La soluzione di un problema comincia *dall'analisi e comprensione del testo*.
Si tratta di una fase di *decodificazione* del contesto del problema, che coinvolge le facoltà di osservazione e interpretazione, e richiede azioni e conoscenze *linguistiche* prima ancora che matematiche.
Già a questo punto si innesta un elemento di 'globalità' educativa: l'apprendimento della matematica non dipende solo dall'insegnamento dei contenuti, ma da molti altri fattori, tra i quali fondamentale è la lingua. E viceversa, naturalmente: attraverso la matematica non si produce solo apprendimento di certi contenuti, ma acquisizione di comportamenti mentali e pratici.
Sappiamo quanto frequentemente errori risolutivi abbiano origine nell'incomprensione del testo, e quanto frequentemente tale incomprensione sia di natura linguistica. Un esempio: "... il cubo dell'ascissa aumentat**o** di due ..." viene sovrapposto a "..il cubo dell'ascissa aumentat**a** di due..." . Qui la concordanza di un participio al soggetto pone un ostacolo di natura puramente linguistica che porta a due modelli matematici piuttosto diversi!
La formulazione di un problema può essere tale da indicare quasi da sé la strategia risolutiva, o al contrario può ostacolare l'avvio stesso del lavoro.

La comprensione del testo deve consentire la distinzione tra le *informazioni disponibili*, i *dati* espliciti o impliciti, e quelle *implicite*, la cui esplicitazione costituisce l'*obiettivo* del problema, sia che si tratti di dimostrare una proposizione che di conseguire un risultato numerico. Solo la chiarificazione dell'obiettivo consente di dare una necessaria direzione, uno scopo alle azioni risolutive.

B) Il primo passo verso l'immaginazione e lo sviluppo di una strategia è la capacità di dare una nuova *codificazione* al contesto del problema attraverso una *rappresentazione.* Come dice Vergnaud: "*La rappresentazione non può essere operatoria se non riflette la realtà in modo pertinente e omomorfo [cioè rispettando le strutture relazionali dell'insieme di partenza e dell'insieme di arrivo]. Ciò non significa né che la rappresentazione rifletta tutta la realtà, né che ogni rappresentazione sia necessariamente omomorfa alla realtà. Ma non si comprenderebbe il ruolo della rappresentazione se non vi si scorgesse un riflesso della realtà, uno strumento di simulazione di essa, e di conseguenza, un mezzo per prevedere effetti reali e "calcolare" le azioni necessarie a provocarli o ad evitarli.... Pensare non consiste solo nel passare da una situazione reale alla sua rappresentazione, ma anche nel passare da una rappresentazione ad un'altra e viceversa*." [2]
Mi pare che queste parole chiariscano bene in che senso la rappresentazione di un problema è il primo passo verso la sua soluzione. Ma bisogna anche riflettere sul fatto che esistono diverse modalità di rappresentazione, tali che sia possibile passare dall'una all'altra per compiere le azioni risolutive.

[2] G. Vergnaud *Il bambino, la matematica, la realtà* Armando, pg. 217 e seg.

Per questa ragione non bisogna insegnare ai ragazzi *le rappresentazioni*, ovvero degli schemi fissi, ma *a rappresentare*, ovvero a scegliere e costruirsi la modalità più adeguata di rappresentazione.
La matematica utilizza molte diverse forme di rappresentazioni: è fondamentale non irrigidire i bambini in particolare, ma nemmeno i ragazzi più grandi, in schemi di comportamento fissi, ma lasciarli liberi di scegliersi i codici e le forme di rappresentazione che preferiscono. Solo così si avranno sorprese nel constatare la fantasia che essi spesso rivelano nel "vedersi" le cose in modi che l'insegnante non aveva previsto. E' un'altra occasione per ribadire che non si insegnano i problemi e gli schemi risolutivi, ma un atteggiamento davanti al problema.

C) La fase esecutiva vera e propria comincia con l'intuizione, o meglio, con l'esplicitazione, di una strategia risolutiva.
E' una cosa utile chiedere di avere chiaro e completo uno *schema logico* della soluzione prima di fare qualunque passaggio di calcolo o deduzione.
Certo questa è la fase più delicata della soluzione di un problema. E' vero che, se il testo è stato compreso adeguatamente e si è già espressa una rappresentazione del problema, molte volte si è già in sostanza esplicitato anche un percorso di soluzione. Ma ciò non è automatico, non è garantito fin dall'inizio, e dipende essenzialmente anche dal livello di difficoltà del problema stesso. Infatti, non è sufficiente possedere alcuni schemi fissi di modalità risolutiva: anche quando parliamo del procedimento di analisi e sintesi, stiamo parlando di una forma del nostro complessivo modo di affrontare il problema, non di un algoritmo risolutivo generale.
Questa è la ragione che in molti casi sconcerta i ragazzi, i quali, sentendosi disorientati, tendono a chiedere indicazioni precise e rigide: sembra loro di dovere sempre sapere che tipo di problema hanno davanti, oppure si rifugiano nella richiesta "ci dica come si fa".
Invece questa può essere proprio la fase più bella e interessante, nella quale è possibile mettere in atto l'intuizione e l'inventiva personale.
Certo è necessario avere dei criteri di orientamento, come saper riconoscere tipologie di problemi già affrontati, avere chiaro in che ambito ci si deve muovere, e avere modelli di 'comportamenti' di risoluzione o procedimenti già utilizzati in altri problemi. Questo aiuta particolarmente se ci si trova in contesti già precisati, ad esempio se si sta lavorando su problemi di un tipo preciso, quali problemi di geometria o di geometria analitica, piuttosto che problemi di calcolo delle probabilità o altro.
Di fronte ad un problema nuovo, che si accosta per la prima volta, come ci si deve muovere? Dovendo trovare una strada in un terreno inesplorato, è necessario muoversi per tentativi. Qui diventa però essenziale sottolineare che un conto è *l'azione per tentativi casuali*, che può caratterizzare particolarmente l'attività esplorativa e cognitiva del bambino, e in quel caso non è in sé negativa, tutt'altro. Diverso però è ciò che si deve richiedere come capacità di *strategia* ad un ragazzino o ad giovane, che consiste essenzialmente nel *dare una direzione* ai propri tentativi, forzandosi di prefigurarsi mentalmente il loro effetto, e rifiutandosi di metterli in atto in modo inconsapevole.
Certo la modalità di azione più ragionevole è muoversi *analogicamente*, rifacendosi a situazioni già note e comprese, a schemi di azione o di interpretazione già attuati altrove. Nel punto o nel momento in cui il vecchio schema di azione si mostra inadeguato, lì sarà necessario il salto concettuale, l'adozione di un nuovo schema. E'

proprio in questo che l'attività di risoluzione di problemi diventa occasione privilegiata di apprendimento vero.
Colpisce particolarmente il fatto che spesso i ragazzi di fronte a un problema si accontentino di agire in modo qualsiasi. Piuttosto che riconoscere una propria incapacità o il proprio disorientamento, si mettono a fare qualcosa che essi ritengono sostituivo, anche se non ha alcun nesso con il problema.
All'inizio di una prima media un'insegnante ha rilevato che un significativo numero di alunni di fronte alla richiesta di una operazione che non sapevano fare (divisione) hanno risposto facendo *un'altra* operazione, a caso.
Considero questo atteggiamento una sorta di *sindrome del foglio bianco*: non so fare quello che è richiesto, ma non voglio essere tagliato fuori, intanto dimostro che so fare qualcos'altro, anche se non ha a che fare con ciò di cui si parla. Se questa può essere una motivazione psicologica verosimile del comportamento descritto, le osservazioni prima svolte portano a giudicarla come una regressione all'infanzia dal punto di vista cognitivo.

Quando si è formulata la strategia ritenuta definitiva, si richiede di avere e saper usare le risorse per eseguire il percorso immaginato.
Interviene allora l'aspetto più specifico e *tecnico*, nel quale è richiesto di saper operare ai livelli richiesti, ma soprattutto di saper collocare l'azione singola nel contesto complessivo.
Non è infatti la stessa cosa, per esempio, saper fare le moltiplicazioni e capire che, in un dato contesto, si devono moltiplicare due elementi; oppure saper scrivere l'equazione di una retta per un punto assegnato un coefficiente angolare, e capire che quello è ciò che si deve fare per determinare una certa tangente a una curva. L'esecuzione di un problema, insomma, dal più semplice al più complesso, non è la somma delle singole azioni che esso richiede, ma di più. Questo è ciò che io voglio esprimere dicendo che è un *progetto*.

D) La soluzione di un problema non si conclude con il risultato: anche quando si è certi che l'obiettivo sia stato raggiunto, è fondamentale aprire una fase di *verifica*, o meglio, di *critica*.
Non si tratta solo di azioni di controllo, che pure sono una abitudine molto positiva. Si tratta di un ripensamento complessivo di quanto si è messo in opera, che ne esamini la coerenza e l'adeguatezza. E' questo che può condurre sia a porre nuovi problemi, spostando l'obiettivo che si è raggiunto, sia a cercare nuove procedure risolutive dello stesso problema, mettendo così in luce la necessità di adeguare al contesto anche l'opportunità della scelta tra diverse strategie, che possono di per sé produrre effetti equivalenti.
E' significativo di un atteggiamento mentale particolarmente rigido il rifiuto a cercare diverse strategie per un problema, quando se ne sia acquisita una. Coloro che si richiudono in questa convinzione, credendo di semplificarsi l'apprendimento perché non aggiungono variazioni su cose già note (lo so già fare così), ma sono assetati di novità, si ritrovano inevitabilmente prima o poi in difficoltà di fronte a situazioni di maggiore complessità, nelle quali le cose note vanno giocate in modo diverso.
Lavorare sui problemi mette in evidenza che la criticità non è solo la ricerca degli errori, ma la disponibilità a modificare il proprio punto di vista sulle cose, per conquistare di esse una visione più profonda e più vera.

Parte II

FUNZIONI DEL PROBLEMA E SUO USO NEL LAVORO DIDATTICO: UN PERCORSO NELLA SCUOLA MEDIA

Abbiamo cercato di mostrare che la matematica è una modalità di lavoro sui problemi che non si riduce a al semplice allenamento a risolvere determinate categorie di problemi. Questo, anche se purtroppo è uno schema mentale diffuso, riduce lavorare sui problemi a una *casistica*. Non parleremmo allora di azione del progettare, perché è evidente che in questo modo rientrerebbe dalla finestra quell'addestramento che cercavamo di fare uscire dalla porta.
Vediamo attraverso alcuni esempi come il problema può essere utilizzato in modo fecondo nell'azione didattica.

1. Il problema come stimolo

Nella didattica si può e si deve lavorare attraverso problemi per iniziare un argomento nuovo, per sviluppare questioni aperte passando da un livello ormai acquisito a uno superiore, per aprire nuove problematiche.
Partire da un problema, che magari contenga un contesto non strettamente matematico, per avvicinare un nuovo concetto, per giungere a una definizione, per operare una sintesi tra diversi capitoli o argomenti, è generalmente una modalità più opportuna della semplice spiegazione, perché crea l'occasione affinché siano i ragazzi stessi a giocare le risorse che hanno acquisito in situazioni rinnovate.
In questo senso il problema viene usato come *stimolo*, come sollecitazione della curiosità e dell'attività dei ragazzi. Proprio perché offre un contesto globale, un problema opportunamente pensato richiede di utilizzare contemporaneamente più conoscenze, più procedure, più forme di ragionamento. Ha quindi la funzione di favorire il crearsi spontaneo, all'interno delle capacità stesse dei ragazzi, di nessi concettuali, di collegamenti orizzontali e verticali tra contesti diversi.
Chi apprende si convince di più che è alla sua portata uscire dall'area del conosciuto per addentrarsi in qualcosa che non è ancora noto, mettendo in azione le sue conoscenze e capacità, e cercando di procurarsi quegli strumenti di cui eventualmente manchi.
Ponendo un problema, non si richiede a un ragazzo solo di fare ciò che sa già fare, ma ci si colloca nella *zona di sviluppo prossimale*, come acutamente dice Vygotsky, ovvero li si porta a utilizzare le loro capacità per fare qualcosa che non sanno ancora fare, ma a cui possono arrivare con le proprie forze.
Infatti risolvere un problema richiede di partire dalla visione sintetica del contesto, per arrivare a cercare gli strumenti della esecuzione analitica del procedimento; se la soluzione poi, come si diceva, non si conclude nel risultato, ne viene una nuova visione di sintesi, nella quale si possono introdurre elementi prima sconosciuti.
Per esempio, per **introdurre** il m. c. m. si può partire da problemi del tipo:
1] Tre ingranaggi A, B e C hanno rispettivamente 30, 10, 50 denti. Di quanti denti deve girare ciascuna ruota affinché la struttura ritorni esattamente alla configurazione iniziale?

2] Un ciclista fa un giro di pista in 18 minuti, un altro in 24 minuti. Se essi partono insieme, dopo quanto tempo si ritrovano insieme al punto di partenza? Quanti giri ha fatto ciascuno di essi? (Uno dei due ha doppiato l'altro?)

In particolare, vorrei segnalare che una delle occasioni più opportune per lavorare attraverso problemi è il passaggio alla simbolizzazione che è richiesto nell'algebra.
Spesso infatti le difficoltà di apprendimento che caratterizzano questa parte della matematica non corrispondono ad ostacoli nella *manipolazione* dei simboli, che può essere acquisita, come spesso lo è, in modo puramente 'meccanico' (applicazione di regole di cui non è richiesta alcuna motivazione). L'algebra, o meglio il calcolo algebrico, potente strumento di razionalità nella sua portata di generalizzazione, diventa invece una palude dell'intelligenza, perché non è *significativo*.

Esempi
1) Stabilire se è vero o falso che nessun quadrato perfetto termina con la cifra 3.
In questo problema, si può passare dall'osservazione di regolarità numeriche alla generalizzazione attraverso il simbolo.
2) Questa è la proposta di una sequenza di problemi, che mostra **come** passo passo si può portare ad un concetto attraverso un percorso dall'osservazione all'apertura della domanda alla generalizzazione:

a) A un pranzo di Natale partecipano 6 persone, che brindano ognuno con tutti gli altri. Quanti cin-cin vengono scambiati in tutto?
b) A un torneo di calcio sono iscritte 10 squadre; ciascuna incontra tutte le altre una sola volta. Quante partite vengono giocate in tutto durante quel torneo?
(identico modello, variazione dei dati numerici)
c) Una rete ferroviaria collega 8 città, in modo tale che ognuna è collegata con tutte le altre, e nessuna si trova su un tratto ferroviario che collega altre due. Quanti sono i tratti ferroviari di quella rete?
E' ancora lo stesso modello, con dati diversi. A questo punto già alcuni da soli osservano: è la stessa cosa. Si può dare lo stimolo attraverso domande, per chi ha bisogno di maggior tempo o non fa il passo da solo: Hai osservato qualcosa di comune tra i tre problemi? Prova ora ad affrontare questo problema.
d) In un piano sono assegnati 12 punti distinti, a tre a tre mai allineati. Quanti segmenti (distinti) congiungenti i punti a due a due si possono tracciare?

Stimolo: trovare una **formula** che risolva il seguente problema:

e) In un piano sono assegnati n punti distinti, a tre a tre mai allineati. Quanti segmenti distinti che congiungano i punti a due a due possiamo tracciare?

La generalizzazione ulteriore nasce spontaneamente:

f) Quante diagonali si possono tracciare in un poligono (convesso) di 6 vertici? E di 7 vertici? E di n vertici?

Una collega insegnante in una terza media a cui avevo suggerito questo percorso, con una certa meraviglia, ha dovuto constatare che una buona parte dei ragazzi è arrivata spontaneamente a individuare l'analogia tra i primi tre problemi (che avevano risolto nei modi più semplici e disparati) e i successivi, nei quali si passa da un contesto generico ad un contesto geometrico.
Le formule richieste sono state conquistate spontaneamente da molti, anche se non da tutti, risultato veramente notevole per chi vuole che un ragazzo comprenda il passaggio al simbolico come conquista di *scritture significative*. Riflettiamo che troppo spesso simbolico diventa sinonimo di privo di senso.

Cosa ancora più interessante, si è evidenziata la difficoltà di chi non è stato in grado di risolvere nemmeno il primo problema con i propri mezzi, perché non riusciva a pervenire ad alcuna rappresentazione mentale o concreta del problema. Di questi, una parte ha poi superato la difficoltà sotto la guida dell'insegnante e lo stimolo dei compagni, alcuni invece non sono venuti a capo della questione.
L'attività proposta ha fornito così anche informazioni di grande rilievo sulla situazione di apprendimento di ragazzi, come analizzeremo più dettagliatamente più avanti.

Un altro interessante esempio di percorso verso la simbolizzazione e la generalizzazione che ha preso occasione da un problema è il seguente, (tratto dalle gare matematiche del 1990) proposto in una terza media.
"Sulle caselle di una scacchiera quadrata 4X4 vengono collocati dei granelli di riso secondo le regole: si mette 1 granello sulle caselle corrispondenti a una riga dispari e una colonna dispari, 2 granelli su quelle di riga pari e colonna dispari o viceversa, 3 granelli su quelle di riga pari e colonna pari. Quanti granelli in totale si mettono sulla scacchiera?".
La diversa capacità di simbolizzazione dei ragazzi si è rivelata già dalla rappresentazione della situazione che ciascuno si è fatto: c'è chi ha disegnato i granelli di riso uno per uno, casella per casella; altri hanno indicato i granelli con un trattino, altri ancora hanno scritto direttamente i numeri 1, 2 o 3.
Per fornire la risposta poi c'è stato chi dopo avere riempito tutta la scacchiera ha semplicemente contato, e chi ha invece saputo individuare la configurazione base dei gruppi di 4 caselle adiacenti, che si ripeteva (osservazione delle regolarità); c'è anche chi ha più finemente ancora osservato che la media di granelli per ogni casella era 2, perciò per dare la risposta ha potuto moltiplicare 2 per il numero di caselle.
La libertà di scegliere tra diverse procedure ha consentito a più ragazzi di arrivare alla risposta, pur se con tempi abbastanza diversi, perché la configurazione del problema era di dimensioni abbastanza limitate.
Tuttavia è bastato provare a chiedere cosa sarebbe successo su una scacchiera 8×8 per mostrare la diversità di livello tra i diversi metodi: chi infatti aveva usato il semplice approccio visivo diretto, non sarebbe stato in grado di usarlo con facilità su 64 caselle, mentre il ragionamento sulla media o sulla configurazione base ha consentito facilmente ai ragazzi di estendere la risposta al secondo caso, e anzi di generalizzarla spontaneamente a qualunque scacchiera di dimensioni $n \times n$ con n pari.
La discussione è addirittura proceduta fino a chiedersi come si sarebbe potuto rispondere nel caso di n dispari.
Il lavoro ha mostrato in modo esemplare che la simbolizzazione può non essere imposta dall'insegnante, ma conquistata dalla consapevolezza del ragazzo, se viene posto di fronte a situazioni che ne evidenziano la necessità e il vantaggio.

Uno sviluppo significativo in cui emerge che un percorso attraverso problemi favorisce di molto la comprensione rispetto alla modalità spiegazione/applicazione, è l'introduzione delle equazioni di primo grado.
In questo passo concettuale si mostra come la simbolizzazione è necessaria alla *formalizzazione*, cioè alla possibilità di tradurre un contesto in un *modello* che utilizza il linguaggio matematico per identificare tra loro situazioni anche molto differenti.
E' più utile presentare una serie di problemi, di diverso argomento e difficoltà, che richiedano di formalizzare la situazione in una equazione e poi di risolverla, che fare

astrattamente la procedura algebrica della soluzione (magari cominciando dai principi di equivalenza!), poi gli esercizi, poi, se c'è tempo, i problemi con le equazioni.
Attraverso problemi infatti si conquista, insieme alle procedure risolutive standard, il *senso* di una equazione come espressione simbolica di una relazione espressa dal problema. Si coglie l'idea che la risoluzione non è un semplice esercizio di formalismo algebrico, ma la possibilità di risolvere numerosi problemi attraverso le stesse 'operazioni'.

2. Il problema come introduzione alle forme del ragionamento

Il problema ha un ruolo nell'apprendimento della matematica in quanto tale, come *educazione alla logica e al ragionamento* attraverso modalità che non richiedono necessariamente la formalizzazione, ma anzi preparano il terreno perché essa si proponga in modo spontaneo, come facilitazione del percorso della ragione e non come capitolo a sé del programma.
Soprattutto nell'età dell'adolescenza, piuttosto che imporre la formalizzazione dei contenuti e delle deduzioni attraverso i simboli, è molto più importante educare al ragionamento coerente attraverso il contesto linguistico e logico abituale, e in questo lavorare attraverso problemi è particolarmente indicato.
La capacità astrattiva e di ragionamento dei ragazzi di questa età può risultare brillantissima, ma molto spesso richiede di esplicitarsi e precisarsi attraverso espressioni verbali e forme di rappresentazione che non siano rigidamente predeterminate.
Proprio per questo non si devono insegnare *i problemi*: non ci sono i problemi di aritmetica, i problemi di geometria, i problemi di logica, ... e poi successivamente i problemi di analitica o di trigonometria...Tutto il lavoro che si svolge deve essere educazione *al problema*, attraverso varie modalità di esercizio e diverse scelte di contesto, in quanto educazione alla ricerca di procedure ragionevoli di esplicitazione di informazioni utili o necessarie entro un contesto.
Da questo punto di vista, come non ha senso una classificazione dei problemi, riprendiamo l'osservazione fatta che non esiste *il metodo* in assoluto di risoluzione dei problemi. Possiamo parlare di metodi generali di risoluzione di un problema in matematica, come il metodo di *analisi e sintesi* o quello che viene spesso indicato con l'espressione 'top-down', ovvero la scomposizione di un problema complesso in sottoproblemi più semplici. Ma non si tratta di ricette da applicare in tutte le situazioni: essi semplicemente indicano il livello logico a cui si situa la soluzione di un problema, che sia di calcolo o che sia una dimostrazione.

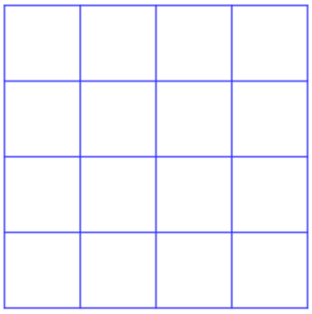
3. Il problema: rottura degli schemi

Poiché il metodo di soluzione dei problemi non è univoco, ogni volta va scelto di fronte a un nuovo problema quello adeguato al contesto del problema stesso.
Una opportuna scelta di diversi problemi ottiene una azione di *rottura degli schemi* che è assai significativa in un insegnamento che non vuole limitarsi all'addestramento.
Proprio in questo senso, una delle funzioni del lavoro attraverso problemi è l'*azione di contrasto*.

Succede infatti che di fronte a problemi alcuni tendano sempre a chiedere e a cercare 'come si fa', tornando, oltre ogni buona intenzione dell'insegnante, al comportamento strettamente esecutivo. Attraverso un nuovo problema si può presentare una situazione nuova, un nuovo tipo di domanda, di fronte alla quale non ci si può limitare a ripetere un itinerario già noto, non si può usare uno schema concettuale collaudato, ma si richiede di individuarne di nuovi.

Esempi

1. Contare quanti quadrati vi sono in questa figura



Questo va considerato un problema di geometria? Eppure c'è una figura geometrica.
Allora è un problema di aritmetica? Eppure c'è da contare.
Io direi semplicemente che questo è un problema di *osservazione*, intesa come attitudine a guardare la realtà attraverso uno sguardo razionale. Ma è anche, ed è conseguenza dell'osservazione, un problema di classificazione, di strategia e di capacità di generalizzazione. Lo prova il fatto che, ancora in una terza media, molti ragazzi si sono trovati in difficoltà non a trovare il risultato, ma a rispondere alla domanda: come sei arrivato alla soluzione? Essi riuscivano a dire: ho semplicemente contato!, e solo dopo una certa analisi e riflessione hanno esplicitato tutti i passaggi che li avevano condotti a 'contare' i diversi triangoli.

2. In aritmetica, dopo aver lavorato sulla scomposizione dei numeri in fattori e sulla divisibilità, può essere utile presentare problemi sulla non divisibilità; ne offro uno sui resti (ma ve ne sono di più facili):
"*Trovare un numero di due cifre tale che:*
- diviso per due dia resto 1
- diviso per 3 dia resto 2
- diviso per 4 dia resto 3
- diviso per 5 dia resto 4."

La rottura degli schemi implica, oltre che proporre certi tipi di problemi, di accettare da parte dei ragazzi diverse modalità di soluzione. Ciò che è importante esigere, anche se costa spesso molta fatica, è *rendere conto* esplicitamente dei percorsi attuati. E' chiaro che questo richiede un lavoro nel lavoro, perché talvolta i ragazzi (e anche noi) giungono a risolvere il problema "vedendolo", cioè in una visione mentale, con qualche intuizione, che è poi assai difficile tradurre sia in immagini che in parole. Tuttavia è molto importante insistere, perché proprio attraverso la fatica della esplicitazione l'azione mentale prodotta può diventare azione consapevole.

Gli aspetti considerati negli ultimi due paragrafi, il problema come educazione al ragionamento o come azione di contrasto, ribadiscono che non sempre è opportuno, anzi può risultare addirittura contraddittorio allo scopo, *classificare* i tipi di problemi (quelli con una operazione, con due operazioni, quelli con le espressioni, quelli con i grafici, quelli con i diagrammi di flusso, …)
Il problema dovrebbe essere, per definizione, la situazione in cui non si deve già sapere quello che c'è da fare, ma si deve stabilire autonomamente come fare.

Presentare un nuovo problema vuol dire allora mostrare che c'è qualcosa di diverso rispetto a quello che si conosce già, che occorre provare a ragionare in modo nuovo.
Per questo è utile trovare e favorire occasioni didattiche di risoluzioni di problemi del tutto fuori dagli schemi del programma, del genere delle gare o come vere e proprie ‘palestre’ di logica. Più sono ricche e numerose le occasioni che si offrono, più si favorisce l’individuazione spontanea da parte dei ragazzi di classi di problemi tra loro somiglianti. Questa è una importante introduzione ad acquisire i procedimenti base della logica, la generalizzazione, il ragionamento induttivo e analogico, e la deduzione.
Per conquistare queste capacità non si può richiedere solo di ripetere procedure codificate, ma si devono continuamente, in ogni occasione, fare interagire molte delle dimensioni e delle modalità accennate nei punti precedenti.

4. Attraverso il problema: errore e recupero

Se si condivide l’impostazione data fin qui al discorso, che mostra il problema come riflesso in matematica della capacità di progettare, si comprende che il lavoro attraverso il problema può avere una importante funzione anche come strumento di *diagnosi e recupero*.
Per quanto riguarda la diagnosi delle difficoltà o addirittura dei blocchi dell’apprendimento della matematica, è importante convincersi che una difficoltà emerge in un particolare, si può rilevare in un punto preciso e circostanziato, ma quasi sempre si colloca a un livello diverso da quello a cui si manifesta.
Ad esempio: un ragazzo sbaglia le equazioni di primo grado, commettendo un errore che appare strettamente algebrico. Eppure la radice dell'errore non è nell'operazione aritmetica, ma nella non significatività di ciò che sta operando mentre risolve l'equazione. In una situazione del genere, l'opinione comune porta a intervenire nella modalità: facciamogli fare equazioni di primo grado finché non le sbaglia più (addestramento!). L’insuccesso è assicurato: dopo cento equazioni corrette ricomparirà l'errore. L'intervento più ragionevole è invece tornare su problemi da formalizzare con equazioni di primo grado, finché non riemerge il **perché** si risolvono le equazioni in quel modo.

Difficoltà che emergono nell’apprendimento della matematica riguardano spesso in realtà proprio il rapporto del particolare con un suo possibile significato più ampio. Ecco perché il problema è uno strumento di diagnosi ben posto: come abbiamo cercato di sviluppare in tutte le osservazioni precedenti, un problema è un contesto globale, richiede azioni a vari livelli, implica il piano linguistico, rappresentativo, esecutivo, operativo, critico.
Esempio
Una stanza rettangolare misura 30m di lunghezza e 20m di larghezza; il suo pavimento è coperto di moquette. L’unica presa di corrente si trova a metà di uno dei lati maggiori, all’altezza del suolo. Per le pulizie il custode ha a disposizione un aspirapolvere elettrico con il cordone lungo 14m. Può riuscire a pulire tutta la stanza?
Se la risposta è no, qual è l'area della superficie che rimane sporca? Quale parte è di tutta la stanza?
Avevo pensato questo problema per una terza media solo come occasione di ripasso delle aree del cerchio e del rettangolo. Si è rivelato fin dall’inizio qualcosa di molto più ricco di questo.

Poiché il problema non comprendeva la figura, il primo livello di difficoltà è emerso nella fase di rappresentazione: alcuni non si immaginavano la situazione dell'aspirapolvere tracciando una semicirconferenza, ma si riferivano a un triangolo. Inaspettatamente, ciò metteva in evidenza una difficoltà a immaginare e visualizzare l'equidistanza come collegata alla circonferenza; questa difficoltà poteva essere sommata alla non comprensione del testo nella sua espressione linguistica, nonostante a noi appaia di una semplicità elementare.
L'ultima domanda poi si è rivelata occasione di ripasso sulle frazioni, alla base del quale sono emerse difficoltà evidentemente precedenti sulla comprensione del concetto steso di frazione. Ma in una fase successiva di discussione del problema è sorta la domanda: come si può ovviare al fatto che non si arriva a pulire tutta la stanza? Andrebbe prolungato il cordone dell'aspirapolvere: di quanto deve essere prolungato per poter arrivare a pulire tutta la stanza? Inaspettatamente questa domanda ha riportato alla difficoltà rilevata all'inizio, perché non tutti sono arrivati a immaginare che il punto più lontano dalla presa fosse uno dei vertici opposti.
E' stata per me una delle esperienze più significative dell'importanza del lavoro attraverso problemi, anche se è necessario che l'insegnante a sua volta non abbia schemi precostituiti a riguardo di quello che dal problema deve emergere: allora è straordinario ciò che si ha occasione di osservare.
In modo analogo si può impostare attraverso problemi l'azione di recupero.
Infatti, per recuperare la comprensione di concetti non adeguatamente appresi, non è utile insistere in modo miope sulla ripetizione di alcune azioni, che non sono significative per chi le compie. E' invece molto più produttivo operare un cambio di contesto o un cambio di linguaggio: spesso ciò è sufficiente per sbloccare la comprensione e produrre progressi nell'astrazione.
Si opera, infatti, una rottura degli schemi, a due livelli: rispetto a quello che un ragazzo si aspetta di dover fare per andare meglio in matematica, e rispetto a quello che egli si aspetta come richiesta dalla scuola.
Troppo spesso in ambito scolastico si richiede la ripetizione esasperata ed esasperante di atti non significativi, che non comunicano alcuna luce sulle domande che un allievo, esplicitamente o più spesso implicitamente proprio attraverso le sue difficoltà, pone.
La richiesta, inaspettata, di una azione *sensata* diversa da quelle abituali è occasione di vero recupero: recuperare infatti deve voler dire aiutare il ragazzo a produrre una *azione consapevole* e capace di un senso.
Questo è favorito se, invece di insistere su un solo tipo di processo mentale, si offrono occasioni, come sono i problemi, di continuo passaggio dall'analitico al sintetico e viceversa.
In modo analogo si può svolgere una efficace azione di ripasso, magari a distanza di tempo, di argomenti già conclusi attraverso la proposta di problemi sull'argomento.
Questo è suggerito anche dalla convinzione che la modalità della *memorizzazione* in matematica non sia la semplice ripetizione di parole o procedimenti. Essa avviene solo attraverso connessioni, come dice Freudenthal, ed è di queste connessioni che conserviamo memoria, mentre i contenuti possono essere dimenticati, perché sono facilmente ricostruibili attraverso i nessi concettuali. Un concetto compreso ma al momento dimenticato può essere meglio richiamato attraverso un problema, che proponga anche possibilmente un nuovo punto di vista su di esso, che rispolverando semplicemente quanto si riteneva noto.

Parte III

FUNZIONI DEL PROBLEMA E SUO USO NEL LAVORO DIDATTICO: UN PERCORSO NELLA GEOMETRIA DALLA MEDIA ALLA SUPERIORE

Nell'incontro precedente abbiamo esemplificato possibili modalità di lavorare attraverso i problemi per aiutare l'apprendimento della matematica, riferendoli alla scuola media, per sottolineare come in ogni momento del percorso scolastico è possibile educare un atteggiamento attivo e razionale, un modo ragionevole di "fare matematica". Gli esempi proposti non erano suddivisi per argomenti, perché emergesse la sottolineatura di metodo: si possono portare numerosi ulteriori esempi di ciò che abbiamo indicato dettagliando in diversi ambiti disciplinari (aritmetica, geometria, probabilità, logica o altro).

1. Un campo paradigmatico: la geometria

Svilupperemo alcune osservazioni specifiche sul percorso di lavoro su un problema, esemplificando in particolare sulla geometria.
La geometria è un campo privilegiato di applicazione del metodo che stiamo sviscerando a proposito dei problemi. Infatti essa fin dall'origine, fin dalle prime nozioni di carattere matematico che offre, richiede attività che non sono facilmente automatizzabili, non possono essere rese 'meccaniche', come invece tipicamente avviene nel campo algoritmico - algebrico.
Mi riferisco all'osservazione, alla rappresentazione grafica, alla dimostrazione logica, all'invenzione di procedimenti, alla verbalizzazione, alla scoperta.
Comunque, la geometria non esclude la necessità della simbolizzazione e si riannoda anche ai procedimenti algoritmici nel momento in cui, attraverso la geometria analitica, si rivela profondamente legata all'algebra, creando con essa l'ambito concettuale comune che sfocia nell'analisi matematica.
Il percorso della scuola superiore porta infatti a questo sviluppo:

- Alla fine della scuola media gli studenti possiedono, se hanno lavorato adeguatamente, un bagaglio di conoscenze geometriche elementari abbastanza ampio, già organizzate come nomenclatura e come relazioni attraverso strumenti razionali che hanno reso sistematici i contenuti dell'osservazione (a grandi linee, gli enti geometrici fondamentali, le grandezze geometriche come lunghezze, aree e volumi, le relazioni geometriche fondamentali come congruenza, equivalenza, similitudine, le trasformazioni geometriche elementari). Nell'insegnamento della scuola media non deve essere stata ancora affrontata la preoccupazione di precisare i fondamenti logici deduttivi degli strumenti posseduti; ciò non toglie che se si è lavorato in modo ragionevole, cioè non puramente addestrativo, ci si può trovare di fronte a ragazzi in grado di fare buone deduzioni, anche se magari non del tutto consapevoli.
- Nella scuola superiore il passo da fare è precisare l'ambito logico di concezione e di metodo che la geometria fa suo, introducendo l'aspetto della dimostrazione delle proprietà geometriche. La semplice osservazione o l'intuizione devono sottomettersi alla deduzione. Ciò consente da una parte di precisare i contenuti già posseduti, chiarendo ad esempio quali sono i concetti primitivi e quali quelli da essi derivati e in che modo; dall'altra, di arricchire di molto le conoscenze

geometriche proprio avendo la possibilità di *dedurre* via via dalle più semplici, altre che non hanno il requisito di evidenza, e che non si possono accettare se non con motivazioni da giudicare adeguate, cioè con una dimostrazione.

Per esempio, in una classe prima, alle prese con le iniziali difficoltà del passaggio dalla geometria intuitiva alla geometria razionale, ho proposto questa occasione di riflessione sulla differenza tra il livello dell'intuizione e quello della dimostrazione.
Ogni ragazzo disegni un quadrilatero convesso qualsiasi, senza proprietà particolari. Adesso ognuno divida a metà ciascun lato, e congiunga i punti medi. Cosa notate?
Alcuni avevano ottenuto un quadrato, altri un rettangolo o sembrava che venisse una di queste figure. Altri avevano semplicemente ottenuto un parallelogrammo.
A quel punto, abbiamo riflettuto su questi aspetti:
a) il risultato era inaspettato per tutti (né evidenza, né intuizione in aiuto per la possibile scoperta)
b) quale risultato tra le diverse configurazioni emerse andava considerato quello atteso, il più generale possibile?
c) Perché succede che il quadrilatero dei punti medi sia un parallelogramma? Come dimostrarlo?

Ho concluso dicendo: quando arriverete a questa dimostrazione, e ci vorrà ancora qualche mese di lavoro in geometria, ricordatevi quello che abbiamo fatto oggi per comprendere la **necessità** dello strumento logico oltre all'intuizione e all'osservazione.

- Per la via abitualmente chiamata della geometria sintetica si raggiungono da una parte notevoli conoscenze di carattere geometrico, dall'altra un consistente rafforzamento delle capacità logiche complessive, non solo deduttive. Infatti stiamo attenti anche in questo campo pur così bello a non produrre irrigidimento procedurale invece che allargamento di comprensione. Non si impara affatto a dimostrare perché si imparano alcune regole logiche, mentre si impara a dimostrare se si accumulano occasioni di osservazione, comparazione, riflessione, rappresentazione, generalizzazione, particolarizzazione, critica, cambiamento di punto di vista, verifica.
- La geometria si riavvicina all'aritmetica e all'algebra attraverso la misura delle grandezze, e si apre il campo della geometria analitica, che produce una mirabile sintesi tra concetti e procedure della geometria e concetti e procedure dell'algebra. Ecco che 'dimostrare' secondo il procedimento logico e verbale adottato nella geometria sintetica diventa 'calcolare' secondo gli algoritmi dell'algebra, utilizzando numeri e simboli per indicare coordinate o variabili. Viceversa, le procedure dell'algebra assumono significatività nell'interpretazione geometrica delle equazioni e della loro trasformazione. Dunque, in matematica nulla ha senso per se stesso, ma diversi contesti producono nuovi significati di concetti già noti.
- La geometria analitica apre nuovi orizzonti concettuali: è possibile studiare attraverso di essa enti geometrici (come le coniche) che non si trattano elementarmente per via sintetica, e vi sono nuovi oggetti che diventano contenuti della geometria, quali le funzioni, attraverso la rappresentazione del loro grafico, che permette di 'guardare' ciò che non si vedeva.
- Uno sviluppo di questa possibilità è l'analisi matematica, che mette a tema i nuovi oggetti sotto la lente comune dell'algebra, che sale enormemente di livello, e della geometria, che diventa studio degli invarianti delle trasformazioni fornite dall'analisi stessa (geometria differenziale).

- Un altro possibile sviluppo è invece l'algebrizzazione della geometria attraverso l'algebra lineare e lo studio delle trasformazioni geometriche, in base a categorie astratte dell'algebra pura.

2. Ricchezza di problemi e di metodi: geometria sintetica

E' opinione comune e diffusa che introdurre la geometria razionale coincida con una specie di tortura degli studenti, costretti a ripetere mnemonicamente dimostrazioni fatte da altri di cose o assolutamente evidenti, delle quali perciò non si comprende la necessità della dimostrazione, o incomprensibili e assurde. Molte persone conservano rancore verso questo contenuto della loro storia scolastica, almeno tante quante, fortunatamente, l'hanno invece apprezzata e goduta. Il che dimostra come anche le cose più ragionevoli e logiche possono diventare occasioni di irrazionalità.
Vi sono però alcune circostanze all'origine di tali modi di pensare. Anche la geometria razionale può diventare campo di semplice addestramento se si insiste eccessivamente su certi formalismi o su determinate tipologie di esercizi e problemi. Invece essa offre una grande varietà di possibilità di azioni, in tutti i sensi sottolineati nel precedente incontro (osservazione, stimolo, rottura di schemi, cambiamento di punto di vista, …). E questa possibilità non dipende dall'elevato livello di conoscenze che è richiesto, ma dal tipo di problema, talvolta dalla sua formulazione.

Esempi
1. Tra i più bei problemi di geometria ci sono problemi che possiamo chiamare di ottimo. Anche alle medie si possono introdurre (isoperimetri) .
Vediamo come alle superiori si può mostrare nell'ambito delle sole isometrie l'importanza delle dimostrazioni geometriche che riguardano disuguaglianze , a partire dal fondamentale teorema sulla disuguaglianza triangolare. Partiamo da questo problema.
Dati una retta r e due punti A e B che non le appartengono e stanno dalla stessa parte rispetto ad essa, determinare qual è la minima spezzata che congiunge A e B passando per un punto P di r.
Si tratta del classico problema di riflessione della luce risolto da Fermat.
Per ottenere la soluzione, è necessario solo conoscere la simmetria assiale e la diseguaglianza triangolare.
Come abbiamo già osservato, la formulazione può cambiare di molto il grado di difficoltà di un problema. Supponiamo di dire:
Verificare *che la minima spezzata congiungente … è quella tale che nel punto P i segmenti AP e PB formano angoli congruenti con la retta r.*
Anche se il procedimento della dimostrazione non cambia, nella seconda formulazione il problema è *chiuso*, cioè è già indicata la configurazione di minimo, e si richiede solo di giustificare la proprietà, mentre nella prima il problema è *aperto*, cioè si richiede sia di individuarla che di giustificare.
Questo problema si può generalizzare in più modi:
a) riflessione su più rette (v. Matematica Controluce vol. 3)
b) riflessione del biliardo
c) passando nello spazio:
Dati due punti su due diverse facce di un diedro, determinare qual è la minima spezzata che li congiunge passando dallo spigolo.

Anche nel prossimi esempi non è richiesto un alto livello di conoscenze, ma una certa intuizione e un'idea risolutiva.

2 .
Mostrare che qualunque quadrilatero può essere scomposto in otto triangoli isosceli.
L'interesse di questo quesito è nell'insolita caratteristica che viene evidenziata di una figura geometrica semplice come un quadrilatero; nella presenza del numero otto, che appare come una costante, e nel tipo di suddivisione richiesta.
Attenzione che non si chiede che i triangoli siano uguali tra loro, cioè non si devono introdurre condizioni non contenute nel testo!

3.
Dimostrare che, dato un triangolo equilatero e un qualunque punto P su di esso o al suo interno, la somma delle distanze di P dai lati del triangolo è costante.

Questo è un esempio particolarmente semplice e bello di un problema in cui il caso generale si riconduce al caso particolare.
Si può poi generalizzare nello spazio*:*
In un tetraedro regolare, preso un punto P sul contorno o all'interno, è costante la somma delle distanze di P dalle facce.

2. Passiamo alla geometria analitica: nuove *dimostrazioni*

Il prossimo problema lo uso spesso in terza scientifico come introduzione alla geometria analitica.

Considerare due circonferenze Γ e Γ' di centri A e A' e rispettivamente di raggi 9 e 1, tangenti esternamente nel punto O. Sia *t* la tangente comune in O alle due circonferenze, ed *s* un'altra retta tangente a Γ e Γ' rispettivamente in B e B'.
Detto C il punto di intersezione di *t* ed *s*, dimostrare che i triangoli ACA' e BOB' sono rettangoli e calcolare il rapporto delle loro aree. (Maturità scientifica ordinaria 1991)

La dimostrazione geometrica di questo problema è relativamente semplice, può essere fatta in una classe seconda; ma è particolarmente ricca la configurazione geometrica che esso contiene, perciò offre una notevole occasione di *lavoro sul problema*.
- Si può osservare che nella figura compaiono 14 triangoli rettangoli tutti simili tra loro.
- Generalizziamo lasciando variabili i raggi delle due circonferenze, indicati con *r* e *r*': allora il rapporto di similitudine dipende dal rapporto dei raggi delle circonferenze, ed è $\sqrt{(r/r')}$
- la dimostrazione conduce invece che a un numero a una *relazione*: il rapporto delle aree è funzione dei raggi . Questa sarà proprio una delle caratteristiche della geometria analitica: individuare relazioni tra le grandezze che sono in gioco e tradurle in equazioni.

La geometria analitica offre occasioni di lavoro sui problemi veramente preziose.
In essa infatti il metodo stesso richiede:
- di usare una *pluralità di linguaggi*: dalla formulazione verbale è quasi sempre necessario passare alla rappresentazione grafica, e, fatto nuovo rispetto alle

dimostrazioni geometriche elementari, si richiede di 'tradurre' la situazione nel linguaggio algebrico (equazioni e disequazioni) attraverso l'associazione delle coordinate ai punti.
- Di organizzare in modo chiaro i procedimenti, articolandoli in passi o sottoproblemi, che siano ben mirati all'obbiettivo. Altrimenti la soluzione dei problemi di analitica si riduce a 'quale formula si deve usare', impostazione che riduce a meccanismo la logica delle questioni e prelude a insuccessi quasi garantiti
- Offre un'ampia gamma di occasioni di *paragone tra diversi procedimenti*, obbligando ad uscire dallo schema rigido che ' basta conseguire il risultato' per mettere a fuoco che il procedimento è più importante del risultato stesso.
  Questa visione si può ottenere risolvendo gli stessi tipi di problema con diversi schemi e procedure, o anche partendo da un singolo problema e mostrando con successive modifiche del testo o del contesto come un problema non è mai isolato, ma esemplifica intere famiglie di problemi:
  - dal problema diretto al problema inverso
  - cambiamenti dei dati numerici
  - cambiamento del sistema di riferimento
  - discussione di una situazione problematica, rendendo '*dinamico*' il problema, cioè introducendo un dato variabile e analizzando le diverse configurazioni possibili, compreso i casi particolari più interessanti e i casi 'limite'
  - cambiamento dell'obbiettivo del problema, mantenendo lo stesso contesto (ad esempio, passando da una equazione a una disequazione)
  - cambiamento del contesto del problema, mantenendo lo stesso obbiettivo
  - analizzando il risultato alla ricerca di ulteriori domande, di generalizzazioni, di nuove regolarità o proprietà
- Introduce un nuovo modo di '*dimostrare*', nel quale i passaggi logici della deduzione si traducono in passaggi algebrici su equazioni o disequazioni, sotto opportune condizioni. Questo doppio binario nella possibilità di conquistare nuove conoscenze sugli enti geometrici è stata una delle più feconde intuizioni del pensiero matematico. Occorre però usarlo sempre con quella ragionevolezza che abbiamo ormai più volte evocato: in molte situazioni la dimostrazione sintetica (cioè senza ricorso alle coordinate dei punti) è preferibile a calcoli lunghi e laboriosi, in altre senza la geometria analitica non si otterrebbero certi risultati. Il presupposto fondamentale dal punto di vista teorico e da non trascurare mai dal punto do vista formativo è che questo aspetto mette in luce la *significatività* delle formule e dei calcoli algebrici, e rende importante saper *leggere* i formalismi, non solo saperli manovrare (dall'equazione *riconoscere* le simmetrie delle curve, le caratteristiche delle reciproche relazioni, saper distinguere la funzione dei simboli, incognita o parametro, … e altro).
  Ciò evidenzia come la geometria analitica possa essere un ricchissimo ambito di azioni in più sensi (costruire e riconoscere, particolarizzare e generalizzare, …), fatto che è estremamente educativo della razionalità scientifica. Eppure purtroppo la si può anche ridurre ad un repertorio di formule e ad un insieme di meccanismi!

Per esempio, si può dimostrare per via analitica la proprietà dei quadrilateri che abbiamo richiamato all'inizio: però la dimostrazione analitica è alquanto più lunga di quella sintetica, per la generalità dei dati.
Al contrario, la dimostrazione analitica è vantaggiosa rispetto a quella sintetica, se si vuole verificare la proprietà della retta di Eulero (vedi Contrappunto I, in Matematica Controluce, vol. 1).

E’ interessante e importante evidenziare che la dimostrazione analitica ha un grado di arbitrarietà legato alla scelta del sistema di riferimento.

Tutti questi aspetti, adeguatamente sviluppati, costituiscono un patrimonio di metodo che non verrà più perso da chi 'fa' matematica: infatti le formule si dimenticano, ma basta poco per recuperarle, mentre la capacità di lettura e progettazione che viene favorita dal lavoro sui problemi non viene più smarrita, ed anzi trova espressione sia negli altri campi della matematica (esempi in analisi) che negli altri aspetti del sapere.

BIBLIOGRAFIA

H. Freudenthal *Ripensando l'educazione matematica* La Scuola, BS, 1994
L. S. Vygotsky *Pensiero e linguaggio* Laterza, BA,
C. F. Manara *Problemi di didattica della matematica* La Scuola, BS, 1989
C. F. Manara, M. Marchi *L'insegnamento della matematica* La Scuola, BS, 1993
Z. Krigowska *Cenni di didattica della matematica* Pitagora Editrice, BO, 1979
AA.VV. *La matematica come reinvenzione guidata* Quaderni di DIESSE, MI, 1996
AA.VV. *Parlare di scienza o fare scienza?* Atti del convegno 1995 Quaderni di DIESSE, MI, 1995
Emmeciquadro n. 1 - 5 (rivista per insegnanti di materie scientifiche) Risorse Editoriali, MI, 1998
R. Manara *Considerazioni sugli errori nella didattica della matematica* *Nuova Secondaria* n. 5, anno IX, gennaio 1992

Sui problemi

G. Polya *La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi* Feltrinelli, MI, 1971. (f. e.)
G. Polya *Come risolvere i problemi di matematica. Logica ed euristica nel metodo matematico* Feltrinelli, MI, (f. e.)
G. Vergnaud *Il bambino, la matematica, la realtà* Armando, Roma, 1994
N. Rumi *Il problema matematico come "problema" didattico* Inserto in *Scuola e didattica*, ottobre 1995
AA. VV. *Le Olimpiadi della matematica* Zanichelli, BO, 1994
F. Conti, A. Profeti *I problemi di matematica della Scuola Normale di Pisa* Bollati Boringhieri, TO, 1998
P. Toni *Disfide matematiche a scuola* F. Muzzio, PD, 1985
P. Toni *Scintille matematiche* F. Muzzio, PD, 1993
I. Ghersi *Matematica dilettevole e curiosa* Hoepli, MI, 1988
G. Peano *Giochi di aritmetica e problemi interessanti* Sansoni, FI, 1983
B. A. Kordemsky *Giochi matematici russi* Sansoni, FI, 1982
R. Smullyan *Qual è il titolo di questo libro?* Zanichelli, BO, 1981
R. Smullyan *Donna o tigre?* Zanichelli, BO, 1985